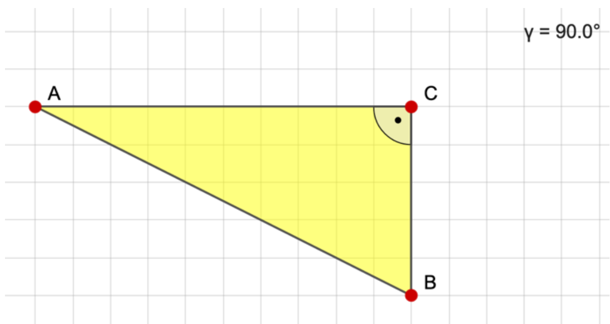
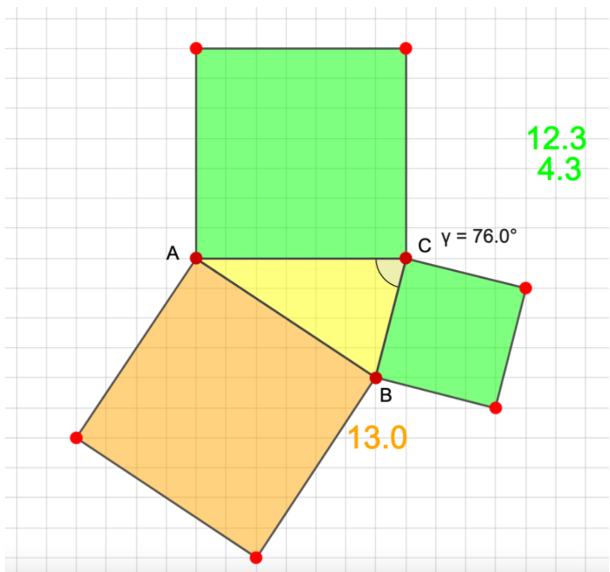
Pythagoras entdecken – Übungsaufgaben

1. Satz des Pythagoras an Gitterpunktdreiecken

   - Schalte den Modus „Einrasten auf Gitter“ ein und zeichne ein Dreieck ABC. Markiere und miss den Winkel bei C, verstecke seinen Namen.
   - Bewege die Punkte des Dreiecks so, dass es rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C wird.



   - Errichte über den Katheten grüne Quadrate und über der Hypotenuse ein oranges Quadrat. Miss den Flächeninhalt der beiden grünen Quadrate und den des orangen Quadrats. Formuliere nochmals den Satz des Pythagoras.
   - Bewege jetzt C, um stumpfwinklige oder spitzwinklige Dreiecke zu erhalten. Notiere wieder deine Beobachtungen über die Summe der grünen verglichen mit der orangen Quadratfläche.



2. Wurzeln aus ungeraden Zahlen

- k ist eine natürliche Zahl. Begründe durch Termumformung:

  Die Differenz zweier benachbarter Quadratzahlen k^2 und $(k-1)^2$ ist immer eine ungerade Zahl.

  Umgekehrt gilt genauso: Jede ungerade natürliche Zahl lässt sich als Differenz zweier benachbarter Quadratzahlen schreiben.

- Schreibe (als Beispiel) die Zahlen 27 und 13 als Differenzen von Quadratzahlen auf.

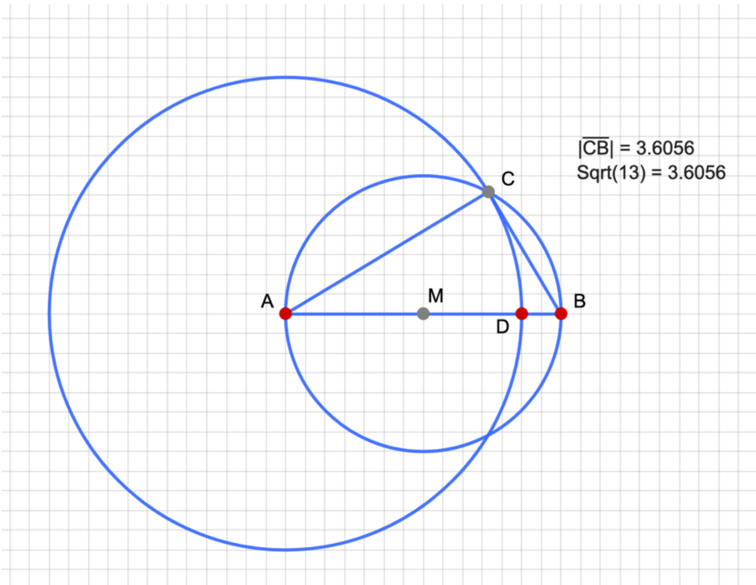
- Im Folgenden soll eine Strecke der Länge $\sqrt{13}$ konstruiert werden. Dazu ist der Satz von Pythagoras hilfreich. Nach den Überlegungen von vorhin gilt: $k^2 - (k-1)^2 = 13$ mit k=7. Für k schreiben wir jetzt c.

  Substituiere auch (k–1) und 13 geeignet, sodass schließlich gilt:

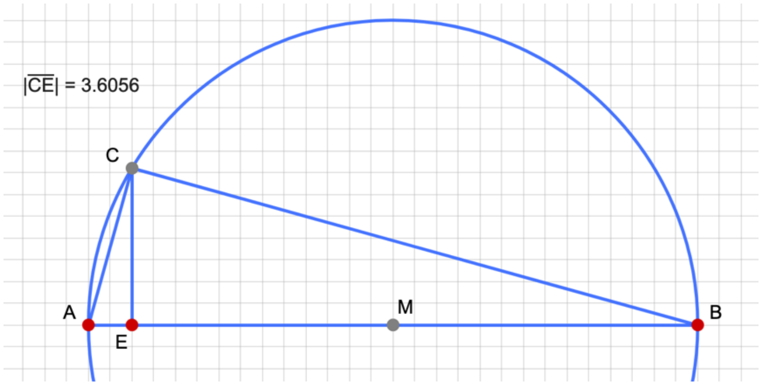
  $a^2 + b^2 = c^2$.

- Damit muss nur noch ein rechtwinkliges Dreieck ABC (rechter Winkel bei c) mit c=7 und b=6 konstruiert werden. Warum hat dann die Seite a die gewünschte Länge $\sqrt{13}$?

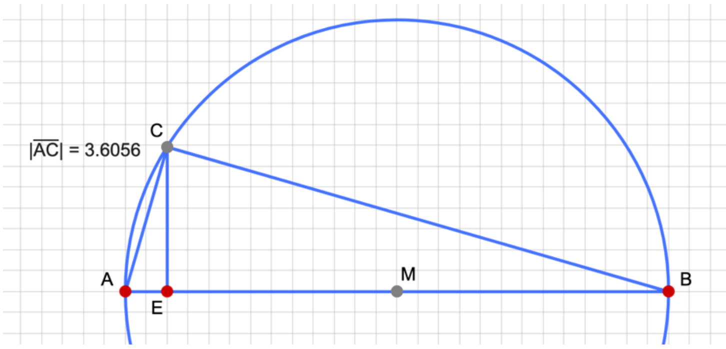
- Tipp: Verwende zur Konstruktion den Satz des Thales.



- Versuche jetzt die $\sqrt{13}$ mithilfe des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck zu konstruieren.

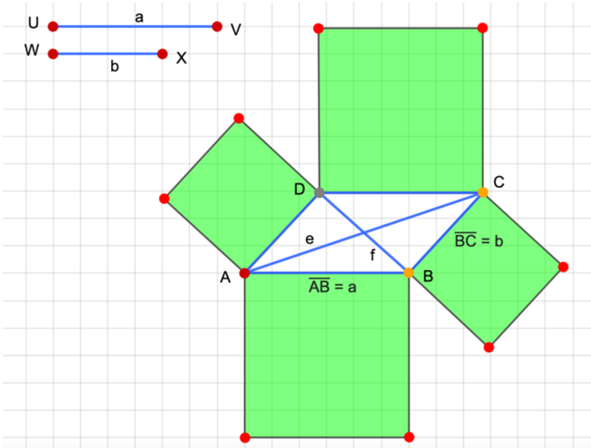


- $\sqrt{13}$ lässt sich auch mithilfe des Kathetensatzes im rechtwinkligen Dreieck konstruieren. Begründe und konstruiere mit sketchometry.

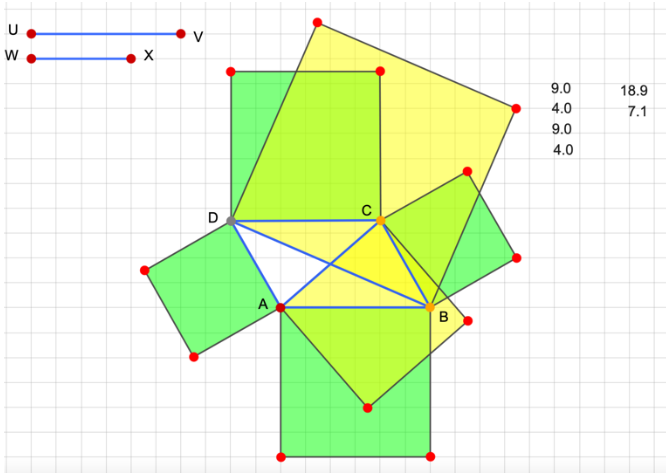


3. Pythagoras am Parallelogramm

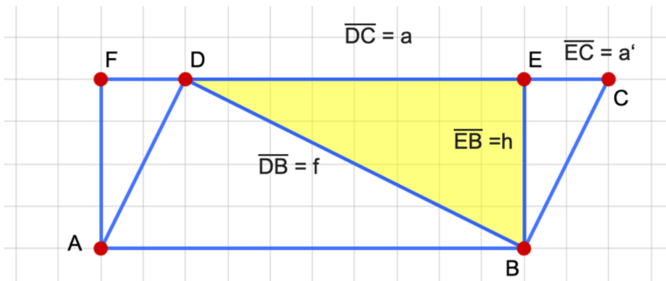
- Zeichne ein Parallelogramm ABCD mit den veränderbaren Seiten a und b.
- Errichte über den Seiten nach außen hin grüne Quadrate.



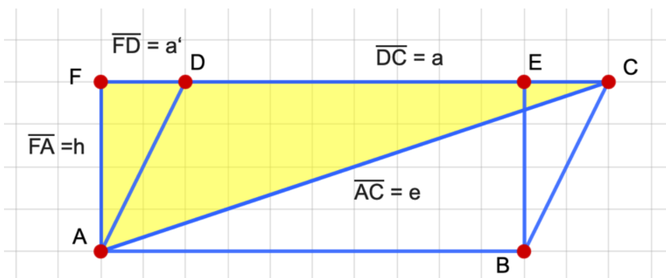
- Zeichne jetzt auch noch gelbe Quadrate über den Diagonalen ein.
- Miss die Summe der grünen Flächen und die Summe der gelben Flächen. Ziehe an V oder X, um die Längen der Parallelogrammseiten zu verändern. Was fällt dir auf? Formuliere eine Vermutung.



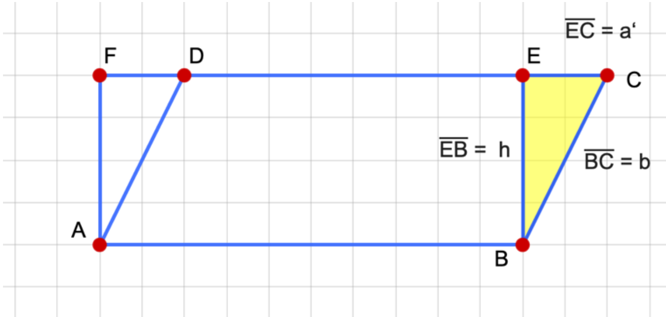
- Stelle durch Ziehen an C zunächst den Spezialfall „Rechteck“ ein. Jetzt kannst du die Vermutung leicht begründen.
- Wenn man die Vermutung am allgemeinen Parallelogramm beweisen will, müssen die Längen e und f der Diagonalen durch die Längen a und b der Parallelogrammseiten ausgedrückt werden. Es helfen spezielle rechtwinklige Dreiecke und der Satz des Pythagoras.
- Berechne f^2 im rechtwinkligen Dreieck DBE. Die Höhe h des Parallelogramms steht senkrecht auf DC.



- Berechne e^2 im rechtwinkligen Dreieck ACF.



- Jetzt kannst du bereits Summe $e^2 + f^2$ berechnen. Allerdings befindet sich in deiner Formel noch die Höhe h und die Teilstrecke a‘ des Parallelogramms.
- Berechne h^2 im rechtwinkligen Dreieck BCE, ersetze es in der gerade berechneten Summe und vereinfache den Term soweit wie möglich.



Formuliere ein Ergebnis:

„Im Parallelogramm gilt: Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den .... ist gleich der Summe der ....“